SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Giovanni Bellettini

SEMICONTINUITA' E RILASSAMENTO DI UN FUNZIONALE DIPENDENTE DALLE CURVATURE IN DIMENSIONE DUE

6 febbraio 1992

SEMICONTINUITÀ DI UN FUNZIONALE DELLA SEGMENTAZIONE DIPENDENTE DA UNA FUNZIONE CONVESSA DELLA CURVATURA

G. BELLETTINI‡

1. Introduzione. In un recente lavoro nell'ambito della ricostruzione di immagini nella teoria della visione, Mumford e Nitzberg [15] hanno proposto lo studio di funzionali dipendenti dalla curvatura del bordo di certi sottoinsiemi del piano. In questo nota studio la semicontinuità, rispetto alla topologia di $L^1(\mathbf{R}^2)$, del funzionale

$$\mathcal{F}_\phi(E) = \int_{\partial E} [1 + \phi(\kappa(z))] \, d\mathcal{H}^1(z), \tag{1.1}$$

dove $E \subseteq \mathbf{R}^2$ è un aperto limitato di classe C^2, $\kappa(z) = \kappa_{\partial E}(z) \in \mathbf{R}^2$ è la curvatura di ∂E nel punto z, ϕ è una funzione positiva e convessa di κ con crescita almeno lineare all'infinito (si veda la condizione (2.1)), e $\mathcal{H}^1$ è la misura di Hausdorff uno-dimensionale in $\mathbf{R}^2$ [10].

Il funzionale $\mathcal{F}_\phi$ risulta una versione semplificata dei funzionali suggeriti in [15], che sono definiti su famiglie finite ordinate di sottoinsiemi del piano. Come caso modello per la funzione ϕ, si può considerare

$$\phi(z) = \begin{cases} c_1|z|^2 & \text{se } |z| < \frac{c_2}{c_1}, \\ 2c_2|z| - \frac{c_2^2}{c_1} & \text{se } |z| \geq \frac{c_2}{c_1}, \end{cases} \tag{1.2}$$

con $c_1, c_2 \in]0, +\infty[$, esempio che, data la convessità di ϕ e la sua crescita lineare all'infinito, rientra nei casi considerati nel presente lavoro.

In [2] è stato affrontato uno studio sistematico delle proprietà di semicontinuità e rilassamento nella topologia di $L^1(\mathbf{R}^2)$ del funzionale $\mathcal{F}_\phi$, nel caso in cui $\phi(\kappa) = |\kappa|^p$, dove $p > 1$ è un numero reale. La presenza di una ϕ eventualmente lineare all'infinito rende, dal punto di vista di una possibile estensione semicontinua di $\mathcal{F}_\phi$ ad insiemi non regolari, il funzionale (1.1) assai diverso dal funzionale $\mathcal{F}_{|\cdot|^p}$ studiato in [2]. Consideriamo infatti il seguente esempio. Sia ϕ la funzione definita in (1.2), e sia E l'insieme in Figura 1.1. È facile provare che esiste una successione $\{E_h\}_h$ di insiemi aperti limitati di classe C^2 tale che $E_h \to E$ in $L^1(\mathbf{R}^2)$ per $h \to +\infty$ e $\sup_h \mathcal{F}_\phi(E_h) < +\infty$ (si veda la Figura 1.2). È stato invece dimostrato in [2] che una tale successione non può esistere per l'insieme in Figura 1.1, quando $\mathcal{F}_\phi = \mathcal{F}_{|\cdot|^p}$. Una successione approssimante simile a quella della Figura 1.2 può essere adoperata per approssimare l'insieme della Figura 1.3. Ciò mostra come anche gli insiemi i cui bordi abbiano qualche punto di angolo possano venire approssimati in area

‡Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, e International School for Advanced Studies SISSA/ISAS, Trieste. E-mail: Bellettini@dm.unibo.it, Bellettini@tsmi19.sissa.it.

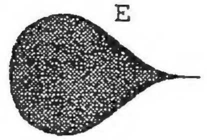

Fig. 1.1: Un insieme E la cui frontiera ha un punto di cuspide. Per questo insieme si può dimostrare che non esiste alcuna successione $\{E_h\}_h$ di insiemi aperti limitati di classe C^2 convergente a E in $L^1(\mathbb{R}^2)$ tale che $\sup_h \mathcal{F}_{|\cdot|^p}(E_h) < +\infty$.

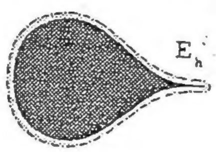

Fig. 1.2: La successione $\{E_h\}_h$ converge ad E in $L^1(\mathbb{R}^2)$ e la successione $\{\mathcal{F}_\phi(E_h)\}_h$ delle energie è uniformemente limitata rispetto a h. Notiamo che $\{\mathcal{F}_{|\cdot|^p}(E_h)\}_h$ non è equilimitata.

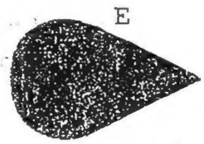

Fig. 1.3: Un insieme E la cui frontiera presenta un punto di angolo.

da successioni di insiemi aventi energia $\mathcal{F}_\phi$ equilimitata. Questo suggerisce di introdurre, per descrivere i bordi di certi insiemi limite, la classe $\mathcal{B}$ delle curve di classe $W^{1,1}$ la cui derivata distribuzionale è una funzione BV a valori in $\mathbb{R}^2$ (si veda la Definizione 2.2). Il problema successivo è dare una definizione di $\mathcal{F}_\phi$ sulle curve della classe $\mathcal{B}$ in modo da avere buone proprietà di semicontinuità (si veda la (2.2)).

In questo lavoro si dimostra la semicontinuità del funzionale $\mathcal{F}_\phi$ (Teorema 3.1, Corollario 3.1), e vengono generalizzati alcuni risultati ottenuti in [2]. Per alcune referenze bibliografiche riguardo a funzionali dipendenti dalla curvatura in un'ottica variazionale si rimanda, ad esempio, a [16] e [6,5,8,9,14]. Lo studio degli insiemi E approssimabili in $L^1(\mathbb{R}^2)$ con una successione $\{E_h\}_h$ di insiemi aperti limitati di classe C^2 tale che $\sup_h \mathcal{F}_\phi(E_h) < +\infty$, nel caso in cui ϕ sia del tipo (1.2), è attualmente oggetto di ricerca.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare Gianni Dal Maso e Maurizio Paolini per le utili discussioni sull'argomento.

2. Notazioni e preliminari. Con $\mathcal{H}^1$ e $\mathcal{L}^2$ indichiamo rispettivamente la misura di

Hausdorff uno-dimensionale e la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^2$ [10]; $\mathcal{L}^1$ è la misura di Lebesgue sulla retta, l'integrale rispetto alla quale verrà in qualche caso indicato anche con dt. Quando scriveremo che una proprietà è vera quasi ovunque (q.o.) su un sottoinsieme di $\mathbf{R}$, intenderemo sempre quasi ovunque rispetto alla misura $\mathcal{L}^1$; nel caso in cui si intenda un'altra misura, questa verrà specificata. Per ogni $z \in \mathbf{R}^2$, indichiamo con $|z|$ la norma euclidea di z, e, se $\varrho > 0$, $B_\varrho(z) = \{w \in \mathbf{R}^2 : |w - z| < \varrho\}$ è la palla di centro z e raggio ϱ. Il simbolo $\triangle$ denota la differenza simmetrica di insiemi. Per ogni sottoinsieme C di $\mathbf{R}^2$, χ_C indica la funzione caratteristica di E, $\mathrm{int}(C)$ denota la parte interna di C, e $\overline{C}$ la sua chiusura.

Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo, e sia μ una misura di Radon scalare o vettoriale su I. Indichiamo con $|\mu|$ la misura variazione totale di μ. Esiste un'unica decomposizione di Lebesgue $\mu = \mu^a + \mu^s$, dove μ^a è la parte assolutamente continua e μ^s è la parte singolare di μ rispetto a $\mathcal{L}^1$. Se ν è una misura assolutamente continua rispetto a μ, la densità di ν rispetto a μ viene indicata con $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Se J è un intervallo di $\mathbf{R}$, e $h : I \to J$ è una funzione misurabile, la misura $h_\#(\mu)$ su J è definita da $h_\#(\mu)(B) = \mu(h^{-1}(B))$, per ogni sottoinsieme $B \subseteq J$.

Lo spazio $BV(I)$ delle funzioni a variazione limitata su I è definito come lo spazio delle funzioni $u \in L^1(I)$ la cui derivata u' nel senso delle distribuzioni è una misura di Radon a variazione totale finita su I. Data $u \in BV(I)$, esiste una funzione v tale che $v(t) = u(t)$ per quasi ogni $t \in I$, e v è una funzione a variazione limitata in senso classico [10, §§4.5.9,4.5.10]. Se $u^+(t), u^-(t)$ indicano rispettivamente il limite superiore e il limite inferiore approssimati di u nel punto $t \in I$ [10], allora si ha $\{u^+(t), u^-(t)\} = \{\lim_{\tau\to t^+} v(\tau), \lim_{\tau\to t^-} v(\tau)\}$. Si può dimostrare [4], [10, Th. 4.5.9] che le funzioni BV sono approssimativamente derivabili quasi ovunque su I, che la derivata approssimata di u coincide quasi ovunque con u'^a e con la derivata classica di v.

Ci sarà utile la seguente proprietà. Supponiamo che $f : I \to \mathbf{R}$ sia una funzione approssimativamente derivabile quasi ovunque su I; sia $g : I \to \mathbf{R}$ una funzione di Borel, e supponiamo che $f(t) = g(t)$ per quasi ogni $t \in I$. Allora g è approssimativamente derivabile e le derivate approssimate di f e g coincidono quasi ovunque su I.

Con $BV(I, \mathbf{R}^2)$ indichiamo quelle funzioni a valori in $\mathbf{R}^2$ le cui componenti sono di classe $BV(I)$. Per le principali proprietà delle funzioni BV si rimanda a [17,13,11,1], e [10, §§4.5.9,4.5.10].

Sia $\phi : \mathbf{R}^2 \to [0, +\infty)$ una funzione convessa, positiva, tale che

$$(2.1) \qquad \phi(z) \geq \alpha|z| - \beta, \qquad \text{per ogni } z \in \mathbf{R}^2, \quad |z| \geq \frac{\beta}{\alpha},$$

dove $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ sono due numeri reali.

Denotiamo con ϕ_∞ la funzione di recessione di ϕ, cioè

$$\phi_\infty(z) = \lim_{t\to 0^+} t\phi\left(\frac{z}{t}\right) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbf{R}^2.$$

La convessità di ϕ garantisce l'esistenza del limite nella definizione di ϕ_∞.

Per ogni sottoinsieme E aperto limitato di $\mathbf{R}^2$ di classe C^2, definiamo (si veda la (1.1))

$$\mathcal{F}_\phi(E) = \int_{\partial E} [1 + \phi(\kappa(z))] \, d\mathcal{H}^1(z),$$

dove $\kappa(z)$ è la curvatura di ∂E nel punto z.

Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ una curva di classe $W^{1,1}$; con $(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in [0,1]\}$ indichiamo la traccia di γ e con $l(\gamma)$ la sua lunghezza. Con s indichiamo il parametro d'arco, e con $\dot\gamma$, $\ddot\gamma$ le derivate prima e seconda di γ rispetto a s. Se $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\gamma)$, $I(\gamma, z)$ è l'indice di z rispetto a γ [7].

DEFINIZIONE 2.1. *Un sistema di curve è una famiglia finita $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ di curve chiuse di classe $W^{1,1}$ tali che $|\frac{d\gamma^i}{dt}|$ è costante quasi ovunque su $[0,1]$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. La traccia (Γ) di Γ è definita come $\bigcup_{i=1}^m (\gamma^i)$, e la lunghezza $l(\Gamma)$ è definita come $\sum_{i=1}^m l(\gamma^i)$. Se $z \notin (\Gamma)$, l'indice $I(\Gamma, z)$ del punto z rispetto a Γ è definito come $\sum_{i=1}^m I(\gamma^i, z)$.*

Un sistema di curve $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ si dice *disgiunto* se $(\gamma^i) \cap (\gamma^j) = \emptyset$ per ogni $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$.

DEFINIZIONE 2.2. *Un sistema di curve $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ si dice di classe $\mathcal{B}$ se $\gamma^i \in W^{1,1}(0,1)$ e $\frac{d\gamma^i}{dt} \in BV((0,1), \mathbf{R}^2)$, per ogni $i = 1, \ldots, m$.*

Sia $E \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto limitato di classe C^1. Diciamo che un sistema disgiunto di curve Γ è una *parametrizzazione orientata* di ∂E se ogni curva del sistema è semplice, $(\Gamma) = \partial E$, e

$$E = \{z \in \mathbf{R}^2 : I(\Gamma, z) = 1\}, \quad \mathbf{R}^2 \setminus \overline{E} = \{z \in \mathbf{R}^2 : I(\Gamma, z) = 0\}.$$

DEFINIZIONE 2.3. *Diciamo che una successione $\{\Gamma_h\}_h$ di sistemi di curve di classe C^2 è debolmente convergente a un sistema di curve $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ se il numero di curve di ogni sistema Γ_h è lo stesso del numero di curve di Γ per h sufficientemente grande, cioè $\Gamma = \{\gamma^1_h, \ldots, \gamma^m_h\}$, e, inoltre, se $\gamma^i_h \to \gamma^i$ uniformemente in $C^0(0,1)$, $\frac{d\gamma^i_h}{dt} \rightharpoonup \frac{d\gamma^i}{dt}$ debolmente in $BV((0,1), \mathbf{R}^2)$ per $h \to +\infty$, per ogni $i = 1, \ldots, m$.*

DEFINIZIONE 2.4. *Diciamo che Γ è un sistema limite di curve se esiste una successione $\{\Gamma_h\}_h$ di parametrizzazioni orientate di insiemi aperti limitati di classe C^2 che convege debolmente a Γ.*

Notiamo che se Γ è un sistema limite di curve, allora Γ è di classe $\mathcal{B}$.

Vogliamo estendere la definizione del funzionale $\mathcal{F}_\phi$ (si veda la (2.2)) ai sistemi di curve della classe $\mathcal{B}$, in maniera da avere buone proprietà di semicontinuità (Teorema 2.1). Una delle possibili estensioni è la seguente. Supponiamo che il sistema di curve consista di una sola curva γ di classe $\mathcal{B}$. Definiamo

$$\|\kappa(\gamma)\|_\phi^a = l(\gamma)\int_0^1 \phi(l(\gamma)^{-2}\frac{d\gamma''^a}{d\mathcal{L}^1}(t))\, d\mathcal{L}^1(t) = l(\gamma)\int_0^1 \phi(l(\gamma)^{-2}\frac{d\gamma''}{d\mathcal{L}^1}(t))\, d\mathcal{L}^1(t),$$

$$\|\kappa(\gamma)\|_\phi^s = l(\gamma)\int_0^1 \phi_\infty(\frac{d\gamma''^s}{d|\gamma''^s|})d|\gamma''^s|.$$

Dato che γ''^s può avere masse concentrate in singoli punti di $[0,1]$, nella definizione di $\|\kappa(\gamma)\|_\phi^s$ si considera anche l'eventuale contributo di γ''^s nel punto $\{0\}$ (ricordiamo che la curva γ è chiusa, pertanto l'intervallo dei parametri viene identificato con un cerchio, e dunque il punto $\{0\}$ viene identificato con il punto $\{1\}$). Ad esempio, se ϕ è definita da (1.2), allora, essendo $\phi_\infty(z) = 2c_2|z|$ per ogni $z \in \mathbf{R}^2$, si intende

$$\|\kappa(\gamma)\|_\phi^s = 2c_2 l(\gamma)|\gamma''^s|([0,1]) = 2c_2 l(\gamma)\Big[|\gamma''^s|(]0,1[) + |\gamma''^s|(\{0\})\Big] =$$

$$2c_2 l(\gamma)\Big[|\gamma''^s|(]0,1[) + |\gamma'^+(0) - \gamma'^-(0)|\Big].$$

Definiamo poi

$$\|\kappa(\gamma)\|_\phi = \|\kappa(\gamma)\|_\phi^a + \|\kappa(\gamma)\|_\phi^s, \qquad \mathcal{F}_\phi(\gamma) = l(\gamma) + \|\kappa(\gamma)\|_\phi.$$

Infine, se $\Gamma = \{\gamma^1,\ldots,\gamma^m\}$ è un sistema di curve della classe $\mathcal{B}$, poniamo

$$\|\kappa(\Gamma)\|_\phi = \sum_{i=1}^m \|\kappa(\gamma^i)\|_\phi; \qquad \mathcal{F}_\phi(\Gamma) = l(\Gamma) + \|\kappa(\Gamma)\|_\phi. \tag{2.2}$$

Osserviamo che, se γ è di classe $\mathcal{C}^2$, allora, usando il parametro d'arco $s(t) = tl(\gamma)$,

$$\|\kappa(\gamma)\|_\phi = \|\kappa(\gamma)\|_\phi^a = l(\gamma)\int_0^1 \phi(l(\gamma)^{-2}\gamma''(t))\, d\mathcal{L}^1(t) = \int_0^{l(\gamma)} \phi(\ddot\gamma(s))\, d\mathcal{L}^1(s).$$

Per il seguente risultato si rimanda a [12].

TEOREMA 2.1. *Sia $\gamma \in \mathcal{B}$, e sia $\{\gamma_h\}_h$ una successione di curve chiuse di classe $\mathcal{B}$ tali che $l(\gamma_h) \to l(\gamma)$ e $\gamma_h'' \rightharpoonup \gamma''$ debolmente come misure, per $h \to +\infty$. Allora*

$$\|\kappa(\gamma)\|_\phi \le \liminf_{h\to+\infty} \|\kappa(\gamma_h)\|_\phi.$$

Vediamo come si trasforma la definizione di $\mathcal{F}_\phi(\gamma)$ quando la curva γ è parametrizzata per lunghezza d'arco. Abbiamo bisogno di alcune osservazioni. Sia $u \in W^{1,1}(0,1)$ una funzione tale che $u' \in BV(0,1)$. Sia $\lambda > 0$, sia $T_\lambda :]0,1[\to]0,\lambda[$ la applicazione $T_\lambda(t) = \lambda t$, e sia $u_\lambda(t) = u(\lambda t) = u \circ T_\lambda(t)$. Allora u_λ è di classe $W^{1,1}$ e u'_λ è BV. Come notazione, poniamo $\nu = u''$ e $\nu_\lambda = u''_\lambda$. Supponiamo che u sia di classe $\mathcal{C}^\infty$. Allora, per ogni insieme di Borel $B \subseteq]0,1[$, si ha

$$\int_B \nu_\lambda(t)\, dt = \lambda^2 \int_B \nu(\lambda t)\, dt = \lambda \int_{\lambda B} \nu(s)\, ds.$$

Pertanto, per ogni funzione $\psi : I \to \mathbf{R}$ continua a supporto compatto,

$$\int_0^1 \psi(t)\nu_\lambda(t)\, dt = \lambda \int_0^\lambda \psi(\lambda^{-1}s)\nu(s)\, ds.$$

Questa uguaglianza si estende, usando la convoluzione, alla stessa uguaglianza (adesso l'integrazione si intende rispetto alle misure ν_λ e ν) per la classe delle funzioni $u \in W^{1,1}$ la cui derivata prima è una funzione BV. Ne segue che, per ogni insieme di Borel $B \subseteq [0,1]$, si ha $\nu_\lambda(B) = \lambda\nu(T_\lambda(B))$, cioè, $\nu_\lambda = \lambda T_{\lambda^{-1}\#}(\nu)$. Dalla unicità della decomposizione di Lebesgue in parte assolutamente continua e parte singolare, ne segue

$$\nu_\lambda^a = \lambda T_{\lambda^{-1}\#}(\nu^a) \qquad \nu_\lambda^s = \lambda T_{\lambda^{-1}\#}(\nu^s).$$

Pertanto, per il teorema di derivazione sulle sfere [18, §1.3.9] per q.o. $t \in [0,1]$, si ha

$$\frac{d\nu_\lambda^a}{d\mathcal{L}^1}(t) = \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\nu_\lambda^a(B_\varrho(t))}{\mathcal{L}^1(B_\varrho(t))} = \lambda \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\nu^a(T_\lambda(B_\varrho(t)))}{\mathcal{L}^1(B_\varrho(t))} =$$

$$\lambda \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\nu^a((B_{\lambda\varrho}(\lambda t))}{\lambda^{-1}\mathcal{L}^1(B_{\lambda\varrho}(\lambda t))} = \lambda^2 \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\nu^a((B_{\lambda\varrho}(\lambda t))}{\mathcal{L}^1(B_{\lambda\varrho}(\lambda t))} = \lambda^2 \frac{d\nu^a}{d\mathcal{L}^1}(\lambda t), \tag{2.3}$$

e, per $|\nu_\lambda^s|$-q.o. $t \in [0,1]$,

$$\frac{d\nu_\lambda^s}{d|\nu_\lambda^s|}(t) = \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\nu_\lambda^s(B_\varrho(t))}{|\nu_\lambda^s|(B_\varrho(t))} = \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\nu^s(B_{\lambda\varrho}(\lambda t))}{|\nu^s|(B_{\lambda\varrho}(\lambda t))} = \frac{d\nu^s}{d|\nu^s|}(\lambda t). \tag{2.4}$$

Sia $\gamma \in \mathcal{B}$, e sia $s(t) = tl(\gamma)$ il parametro d'arco. Allora, da (2.3) e (2.4), se γ è parametrizzata per lunghezza d'arco, si ottiene

$$\|\kappa(\gamma)\|_\phi^a = \int_0^{l(\gamma)} \phi(\frac{d\ddot{\gamma}}{d\mathcal{L}^1}(s))\, d\mathcal{L}^1(s),$$

$$\|\kappa(\gamma)\|_\phi^s = \int_0^{l(\gamma)} \phi_\infty(\frac{d\ddot{\gamma}^s}{d|\ddot{\gamma}^s|}) d|\ddot{\gamma}^s|,$$

dove $\ddot{\gamma}$ indica la misura $l(\gamma)^{-1}T_{l(\gamma)\#}(\gamma'')$.

3. Semicontinuità di $\mathcal{F}_\phi$. Il seguente lemma dimostra come ogni curva chiusa di classe C^2 dia un contributo non infinitesimo all'energia $\mathcal{F}_\phi$.

LEMMA 3.1. *Sia $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ un sistema di curve di classe C^2. Allora*

$$m \leq c\mathcal{F}_\phi(\Gamma), \qquad \text{dove } c = \frac{\max(1,\beta)}{2\pi\alpha}. \tag{3.1}$$

DIM: Per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$ si ha ([7, Th. 5.7.3])

$$2\pi \leq \int_0^{l(\gamma^i)} |\ddot{\gamma}^i(s)| \, ds.$$

Essendo ϕ positiva, da (2.1) segue che $\phi(z) \geq \alpha|z| - \beta$ per ogni $z \in \mathbf{R}^2$. Dunque

$$2\pi\alpha \leq \int_0^{l(\gamma^i)} \phi(\ddot{\gamma}^i) \, d\mathcal{L}^1(s) + l(\gamma^i)\beta \leq \max(1,\beta)\mathcal{F}_\phi(\gamma^i).$$

Sommando su $i = 1, \ldots, m$ la precedente disuguaglianza, si ottiene

$$2\pi\alpha m \leq \max(1,\beta)\mathcal{F}_\phi(\Gamma),$$

cioè la tesi. □

Notiamo che nella dimostrazione del Lemma 3.1 l'ipotesi di convessità di ϕ non è stata usata.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia $\{\Gamma_h\}_h$ una successione di sistemi di curve di classe C^2 verificanti*

$$\sup_h l(\Gamma_h) < +\infty, \qquad \sup_h \|\kappa(\Gamma_h)\|_\phi < +\infty, \tag{3.2}$$

e tali che

(i) le tracce (Γ_h) siano contenute in un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}^2$ independente da h;
(ii) esista una costante c_1 tale che ogni curva γ_h^i del sistema Γ_h soddisfi $l(\gamma_h^i) \geq c_1$, per ogni h.

Allora $\{\Gamma_h\}_h$ ha una sottosuccessione che converge debolmente a un sistema di curve Γ di classe $\mathcal{B}$.

DIM: Dalla (3.1), usando la (3.2) ne segue che il numero m_h delle curve del sistema Γ_h è uniformemente limitato rispetto a h. Quindi, per una sottosuccessione $\{\Gamma_h\}_h$, esiste un intero m tale che $\Gamma_h = \{\gamma_h^1, \ldots, \gamma_h^m\}$ per ogni h. Fissiamo $i \in \{1, \ldots, m\}$; usando la condizione (ii) e (3.2) si ha $c_1 \leq l(\gamma_h^i) \leq c_2$ per ogni h, dove c_2 è una costante positiva assoluta. Dunque, per ogni $i = 1, \ldots, m$ e ogni h, la curva γ_h^i può essere parametrizzata, con modulo della velocità costante, su $[0,1]$. Dalla (2.1) e usando (3.2), si ottiene che esiste una costante positiva c_3 tale che $\int_0^1 |\frac{d^2\gamma_h^i}{d^2t}|\, dt \leq c_3$. Dunque, usando la (i), la famiglia $\{\gamma_h^i\}_h$ è equilimitata in $H^{2,1}$. Pertanto ([11, Th. 1.19]), per una sottosuccessione, esistono m curve $\gamma^1, \ldots, \gamma^m$ di classe $\mathcal{B}$ tali che $\gamma_h^i \to \gamma^i$ uniformemente in $C^0(0,1)$, $\frac{d\gamma_h^i}{dt} \rightharpoonup \frac{d\gamma^i}{dt}$ debolmente in $BV((0,1), \mathbf{R}^2)$ per $h \to +\infty$, per ogni $i = 1, \ldots, m$. Il sistema $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$ è dunque il sistema di curve cercato. □

Siano $\{\Gamma_h\}_h$, Γ come nella dimostrazione della Proposizione 3.1. Notiamo che

$$l(\gamma_h^i) = \int_0^1 |\frac{d\gamma_h^i}{dt}|\, dt \to \int_0^1 |\frac{d\gamma^i}{dt}|\, dt = l(\gamma^i), \tag{3.3}$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Per provare la semicontinuità del funzionale $\mathcal{F}_\phi$, è necessario il seguente risultato, la cui dimostrazione segue dalla (iii) del Lemma 4.1. La prova è posposta per semplificare l'esposizione.

Lemma 3.2. *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto limitato di classe C^2, sia $\{E_h\}_h$ una successione di insiemi aperti limitati di classe C^2 convergente ad E in $L^1(\mathbf{R}^2)$ tale che*

$$\sup_h \mathcal{H}^1(\partial E_h) < +\infty, \quad \sup_h \int_{\partial E_h} \phi(\kappa_h(z))\, d\mathcal{H}^1(z) < +\infty. \tag{3.4}$$

Allora esiste un sistema limite di curve Γ di classe $\mathcal{B}$ tale che $(\Gamma) \supseteq \partial E$.

Dimostriamo adesso il seguente lemma, che confronta il contributo di curvatura del bordo di un insieme regolare E con quello di un sistema di curve di classe $\mathcal{B}$ la cui traccia contiene ∂E.

Lemma 3.3. *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto limitato di classe C^2, e sia Γ un sistema di curve di classe $\mathcal{B}$ tale che $\partial E \subseteq (\Gamma)$. Allora*

$$\int_{\partial E} \phi(\kappa(z))\, d\mathcal{H}^1(z) \leq \|\kappa(\Gamma)\|_\phi^a.$$

Dim: Sia $\Gamma = \{\gamma^1, \ldots, \gamma^m\}$, e prendiamo un insieme misurabile $T \subseteq \partial E$ in modo che esistano due intervalli aperti limitati I, J, e una funzione $f : I \to J$ di classe C^2 tali che

$$(I \times J) \cap E = \{(x,y) \in I \times J : y < f(x)\},$$

$$(I \times J) \cap \partial E = \{(x, f(x)) : x \in I\}, \qquad T \subseteq (I \times J) \cap \partial E.$$

Basterà dimostrare (si veda [2, Lemma 3.4]) che

$$\int_{(\gamma^i)\cap T} \phi(\kappa(z))\, d\mathcal{H}^1(z) \le \int_{\gamma^{i-1}(T)} \phi(\frac{d\ddot{\gamma}^i}{d\mathcal{L}^1})\, d\mathcal{L}^1(s) \qquad \text{per ogni } i = 1,\dots,m. \tag{3.5}$$

Fissiamo $i \in \{1,\dots,m\}$, poniamo $\gamma^{i-1}(T) = V_i$, e scriviamo $\gamma^i(s) = (\gamma_1^i(s), \gamma_2^i(s))$. Ne segue che $\dot{\gamma}_2^i(s) = \frac{d}{ds} f(\gamma_1^i(s))$ per quasi ogni $s \in V_i$. Poi, avendosi $|\dot{\gamma}^i(s)| = 1$ per quasi ogni $s \in [0, l(\gamma^i)]$, si ottiene

$$\dot{\gamma}_1^i(s) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (f'(\gamma_1^i(s)))^2}}, \qquad \dot{\gamma}_2^i(s) = \frac{\pm f'(\gamma_1^i(s))}{\sqrt{1 + (f'(\gamma_1^i(s)))^2}} \qquad \text{per q.o. } s \in V_i.$$

Definiamo

$$V_i^+ = \{s \in V_i : \dot{\gamma}_1^i(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(\gamma_1^i(s)))^2}}\},$$

$$V_i^- = \{s \in V_i : \dot{\gamma}_1^i(s) = \frac{-1}{\sqrt{1 + (f'(\gamma_1^i(s)))^2}}\}.$$

Poichè $\dot{\gamma}_1^i(s)$ è di classe BV, e $\frac{1}{\sqrt{1+(f'(\gamma_1^i(s)))^2}}$ è di classe $W^{1,1}$, e queste due funzioni coincidono su V_i^+, ne segue, da quanto detto nella Sezione 2, che le derivate approssimate coincidono quasi ovunque; pertanto, le parti assolutamente continue coincidono quasi ovunque. Perció

$$\frac{d\ddot{\gamma}_1^{ia}}{d\mathcal{L}^1}(s) = \frac{-f'(\gamma_1^i(s)) f''(\gamma_1^i(s))}{(1 + (f'(\gamma_1^i(s)))^2)^2} \qquad \text{per q.o. } s \in V_i^+.$$

Analogamente, si ottiene che

$$\frac{d\ddot{\gamma}_1^{ia}}{d\mathcal{L}^1}(s) = \frac{-f'(\gamma_1^i(s)) f''(\gamma_1^i(s))}{(1 + (f'(\gamma_1^i(s)))^2)^2} \qquad \text{per q.o. } s \in V_i^-,$$

$$\frac{d\ddot{\gamma}_2^{ia}}{d\mathcal{L}^1}(s) = \frac{f''(\gamma_1^i(s))}{(1 + (f'(\gamma_1^i(s)))^2)^2} \qquad \text{per q.o. } s \in V_i.$$

Ne segue che le componenti dei vettori $\frac{d\ddot{\gamma}^i}{d\mathcal{L}^1}(s)$ e $\kappa(\gamma^i(s))$ coincidono quasi ovunque su V_i, da cui $\phi(\frac{d\ddot{\gamma}^i}{d\mathcal{L}^1}(s)) = \phi(\kappa(\gamma^i(s)))$ per quasi ogni $s \in V_i$. Dunque, da [10 Th. 3.2.6] si ottiene

$$\int_{V_i} \phi(\frac{d\ddot{\gamma}^{ia}}{d\mathcal{L}^1}(s))\, ds = \int_{V_i} \phi(\frac{d\ddot{\gamma}^i}{d\mathcal{L}^1}(s))\, ds = \int_{V_i} \phi(\kappa(\gamma^i(s)))\, ds \ge \int_{(\gamma^i)\cap T} \phi(\kappa(z))\, d\mathcal{H}^1(z),$$

cioè la (3.5). □

Osserviamo che il Lemma 3.3 continua a valere con la stessa dimostrazione se l'insieme E può essere scritto, localmente, come il sottografico di una funzione continua f tale che $f' \in W^{1,1}$.

TEOREMA 3.1. *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^2$ un insieme aperto limitato di classe C^2, e sia $\{E_h\}_h$ una successione di insiemi aperti limitati di classe C^2 convergente ad E in $L^1(\mathbf{R}^2)$. Allora*

$$\int_{\partial E} (1+\phi(\kappa(z)))\, d\mathcal{H}^1(z) \le \liminf_{h\to+\infty} \int_{\partial E_h} (1+\phi(\kappa_h(z)))\, d\mathcal{H}^1(z), \tag{3.6}$$

dove κ e κ_h sono rispettivamente le curvature di ∂E e di ∂E_h.

DIM: Possiamo supporre che il membro destro della (3.6) sia finito, altrimenti non c'è niente da dimostrare. Sia $\{E_{h_k}\}_k$ una sottosuccessione di $\{E_h\}_h$ con la proprietà che

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{F}_\phi(E_{h_k}) = \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}_\phi(E_h) < +\infty. \tag{3.7}$$

Per semplicità, questa sottosuccessione (e ogni sua ulteriore sottosuccessione) sarà indicata con $\{E_k\}_k$. Usando il Lemma 3.1, si ha che, per ogni k, ∂E_k ha un numero finito di componenti connesse. Sia Δ_k una parametrizzazione orientata di ∂E_k. Poichè $\{E_k\}_k$ soddisfa la (3.4), la successione $\{\Delta_k\}_k$ soddisfa la (3.2). Come nella dimostrazione della Proposizione 3.1, possiamo supporre che $\Delta_k = \{\gamma_k^1, \dots, \gamma_k^m\}$ con m indipendente da k. Sia $\{\Gamma_k\}_k = \{\gamma_k^{i_1}, \dots, \gamma_k^{i_n}\}$ la successione e sia Γ il sistema limite di curve di classe $\mathcal{B}$ costruiti nella dimostrazione del Lemma 4.1. Allora, per costruzione, $n \le m$, $\Gamma = \{\gamma^{i_1}, \dots, \gamma^{i_n}\}$, e per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha $\gamma_k{}^{i_j} \to \gamma^{i_j}$ uniformemente in $C^0(0,1)$ e $\frac{d\gamma_k{}^{i_j}}{dt} \rightharpoonup \frac{d\gamma^{i_j}}{dt}$ debolmente in $BV((0,1),\mathbf{R}^2)$ per $k \to +\infty$. Usando la (3.7), la (3.3) e il Teorema 2.1 abbiamo

$$\liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}_\phi(E_h) = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{F}_\phi(E_k) \ge \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^n l(\gamma_k^{i_j}) +$$

$$\liminf_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^n l(\gamma_k^{i_j}) \int_0^1 \phi\Big(l(\gamma_k^{i_j})^{-2} \frac{d\gamma_k''^{i_j}}{d\mathcal{L}^1}(t)\Big)\, d\mathcal{L}^1(t) \ge$$

$$\sum_{j=1}^n l(\gamma^{i_j}) + \sum_{j=1}^n l(\gamma^{i_j}) \liminf_{k\to+\infty} \int_0^1 \phi\Big(l(\gamma_k^{i_j})^{-2} \frac{d\gamma_k''^{i_j}}{d\mathcal{L}^1}(t)\Big)\, d\mathcal{L}^1(t) \ge$$

$$l(\Gamma) + \sum_{j=1}^n l(\gamma^{i_j}) \liminf_{k\to+\infty} \int_0^1 \phi\Big(l(\gamma_k^{i_j})^{-2} \frac{d\gamma_k''^{i_j}}{d\mathcal{L}^1}(t)\Big)\, d\mathcal{L}^1(t) \ge \mathcal{F}_\phi(\Gamma).$$

Ricordando che dal Lemma 3.2 (si veda la (iii) del Lemma 4.1) si ha $(\Gamma) \subseteq \partial E$, usando il Lemma 3.3 otteniamo $\mathcal{F}_\phi(\Gamma) \ge \mathcal{F}_\phi(E)$, e questo conclude la dimostrazione. □

Concludiamo questo paragrafo con la localizzazione del Teorema 3.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Diciamo che un insieme misurabile $E \subseteq \mathbf{R}^2$ è di classe $C^2(\Omega)$ se E è limitato, aperto, e $\Omega \cap \partial E$ è di classe C^2.

Se $E \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, definiamo

$$\mathcal{F}_\phi(E,\Omega) = \int_{\Omega\cap\partial E} (1+\phi(\kappa(z))\, d\mathcal{H}^1(z).$$

Corollario 3.1. *Sia E un aperto limitato di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$, e sia $\{E_h\}_h$ una successione di aperti limitati di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ convergente a E in $L^1(\Omega)$. Allora*

$$\mathcal{F}_\phi(E,\Omega) \le \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}_\phi(E_h,\Omega).$$

Dim: Sia A un aperto relativamente compatto in Ω. Basterà dimostrare che

$$\mathcal{F}_\phi(E,A) \le \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}_\phi(E_h,A). \tag{3.8}$$

Possiamo supporre che il membro destro di (3.8) sia finito, altrimenti non c'è niente da dimostrare. Sia $\{E_{h_k}\}_k$ una sottosuccessione di $\{E_h\}_h$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{F}_\phi(E_{h_k},A) = \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{F}_\phi(E_h,A) < +\infty.$$

Per semplicità, questa sottosuccessione (e ogni sua ulteriore sottosuccessione) sarà indicata con $\{E_k\}_k$. Poichè

$$\sup_k \mathcal{H}^1(\Omega\cap\partial E_k) < +\infty, \quad \sup_k \int_{\Omega\cap\partial E_k} \phi(\kappa_k(z))\, d\mathcal{H}^1(z) < +\infty,$$

ne segue che, per ogni k,

$$A\cap\partial E_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_k}(\gamma_k^i) \cup \bigcup_{j=1}^{r_k}(\beta_k^j),$$

dove $\{\gamma_k^1,\ldots,\gamma_k^{m_k}\}$ è un sistema disgiunto di curve di classe $\mathcal{C}^2$ tale che $\overline{A}\cap(\gamma_k^i)\neq\emptyset$ per ogni $i=1,\ldots,m_k$ (si veda il Lemma 3.1); $\{\beta_k^1,\ldots,\beta_k^{r_k}\}$ è una famiglia finita di curve semplici regolari di classe $\mathcal{C}^2$ tale che $|\frac{d\beta_k^j}{dt}|$ è costante, $\beta_k^j(0),\beta_k^j(1)\in\partial\Omega$ e $(\beta_k^j)\cap\partial A\neq\emptyset$ per ogni $j=1,\ldots,r_k$; gli insiemi $(\gamma_k^1),\ldots,(\gamma_k^{m_k})$, $(\beta_k^1),\ldots,(\beta_k^{r_k})$ sono a due a due disgiunti, e

$$\sum_{i=1}^{m_k} \mathcal{F}_\phi(\gamma_k^i) + \sum_{j=1}^{r_k} [l(\beta_k^j) + \int_0^{l(\beta_k^j)} \phi(\ddot{\beta}_k^j)\, d\mathcal{L}^1(s)] < +\infty. \tag{3.9}$$

Dal Lemma 3.1 segue che $\{m_k\}_k$ è uniformemente limitata rispetto a k. Poichè $l(\beta_k^j) \ge 2\mathrm{dist}(\partial A,\partial\Omega)$ per ogni $j=1,\ldots,r_k$, usando la (3.9) si ha che anche $\{r_k\}_k$ è uniformemente limitata rispetto a k. Passando ad una opportuna sottosuccessione, possiamo supporre che m_k e r_k siano indipendenti da k. Denotiamo questi numeri con m

e r, rispettivamente. Poichè tutte le curve della famiglia $\{\gamma_k^1,\ldots,\gamma_k^m,\beta_k^1,\ldots,\beta_k^r\}$ incontrano $\overline{A}$, dalla (3.9) segue che le loro tracce sono contenute in un insieme limitato di $\mathbf{R}^2$ indipendente da k. Consideriamo solo la sottofamiglia $\{\gamma_k^{i_1},\ldots,\gamma_k^{i_n}\}$ di $\{\gamma_k^1,\ldots,\gamma_k^m\}$ di quelle curve la cui lunghezza non tende a zero per $k\to+\infty$, e denotiamola per semplicità con $\{\gamma_k^1,\ldots,\gamma_k^n\}$, $n\le m$. Ripetendo i ragionamenti della Proposizione 3.1, per compattezza esiste una famiglia $\Gamma=\{\gamma^1,\ldots,\gamma^n,\beta^1,\ldots,\beta^r\}$ di curve di classe $\mathcal{B}$ tale che $\gamma_k^j\to\gamma^j$ e $\beta_k^l\to\beta^l$ uniformemente in $C^0(0,1)$, $\frac{d\gamma_k^j}{dt}\rightharpoonup\frac{d\gamma^j}{dt}$ e $\frac{\beta_k^l}{dt}\rightharpoonup\frac{d\beta^l}{dt}$ debolmente in $BV((0,1),\mathbf{R}^2)$ per $k\to+\infty$, per ogni $j=1,\ldots,n$ e ogni $l=1,\ldots,r$. Allora, poichè per ipotesi $E\in\mathcal{C}^2(\Omega)$, ne segue che $A\cap(\Gamma)\supseteq A\cap\partial E$ (si veda [2, Th. 7.1]). Ripetendo gli ultimi passaggi della dimostrazione del Teorema 3.1 relativamente a A, si ottiene la (3.8). □

4. **Osservazioni finali.** Ricordiamo che, se $\mathcal{M}$ indica la classe dei sottoinsiemi Lebesgue misurabili di $\mathbf{R}^2$, si definisce funzionale rilassato semicontinuo di $\mathcal{F}_\phi(\cdot,\Omega)$ (o inviluppo semicontinuo di $\mathcal{F}_\phi(\cdot,\Omega)$) la applicazione $\overline{\mathcal{F}_\phi}(\cdot,\Omega):\mathcal{M}\to[0,+\infty]$ data da

$$\overline{\mathcal{F}_\phi}(E,\Omega)=\inf\{\liminf_{h\to+\infty}\mathcal{F}_\phi(E_h,\Omega):E_h\to E\text{ in }L^1(\Omega)\text{ per }h\to+\infty\},$$

per ogni $E\in\mathcal{M}$ (si veda [3]).

Definiamo, per ogni $E\in\mathcal{M}$,

$$E^\star=\{z\in\mathbf{R}^2:\exists\, r>0\ \mathcal{L}^2(B_r(z)\setminus E)=0\},$$

$$F^\star=\{z\in\mathbf{R}^2:\exists\, r>0\ \mathcal{L}^2(B_r(z)\cap E)=0\}.$$

Il seguente Lemma (in particolare la (iii)) generalizza il Lemma 3.2.

LEMMA 4.1. *Sia $E\subseteq\mathbf{R}^2$ un insieme misurabile tale che $\overline{\mathcal{F}_\phi}(E,\mathbf{R}^2)<+\infty$. Allora $E^\star$ e $F^\star$ sono aperti, $E^\star$ è limitato, $\mathcal{L}^2(E\triangle E^\star)=0$, $E^\star=\mathrm{int}(\mathbf{R}^2\setminus F^\star)$, $F^\star=\mathrm{int}(\mathbf{R}^2\setminus E^\star)$, e $\partial E^\star=\partial F^\star=\{z\in\mathbf{R}^2:0<\mathcal{L}^2(B_r(z)\cap E)<\mathcal{L}^2(B_r(z))\ \forall r>0\}$. Inoltre esiste un sistema limite di curve Γ di classe $\mathcal{B}$ con le seguenti proprietà:*

(i) $E^\star=\mathrm{int}(A_\Gamma\cup(\Gamma))\supseteq A_\Gamma$, *dove* $A_\Gamma=\{z\in\mathbf{R}^2\setminus(\Gamma):I(\Gamma,z)=1\}$;

(ii) $F^\star=\mathrm{int}(B_\Gamma\cup(\Gamma))\supseteq B_\Gamma$, *dove* $B_\Gamma=\{z\in\mathbf{R}^2\setminus(\Gamma):I(\Gamma,z)=0\}$;

(iii) $\partial E^\star=\partial F^\star=\partial A_\Gamma\cap\partial B_\Gamma\subseteq(\Gamma)$.

DIM: Dimostreremo l'esistenza di un sistema limite di curve Γ di classe $\mathcal{B}$ tale che $\mathcal{L}^2(E\triangle A_\Gamma)=0$ dove A_Γ è definito in (i), perchè tutte le altre asserzioni del Lemma si dimostrano come in [2, Lemma 3.3].

Poichè per ipotesi $\overline{\mathcal{F}_\phi}(E,\mathbf{R}^2)<+\infty$, possiamo considerare una successione $\{E_h\}_h$ di insiemi aperti limitati di classe $\mathcal{C}^2$ convergente ad E in $L^1(\mathbf{R}^2)$ che verifica (3.4). Per ogni h, da (3.2) e dal Lemma 3.1 si ha che ∂E_h ammette una parametrizzazione orientata Δ_h

di classe C^2, e il numero m_h di curve del sistema Δ_h è uniformemente limitato rispetto a h. Quindi, per una sottosuccessione $\{\Delta_h\}_h$, esiste un intero m tale che $\Delta_h = \{\gamma_h^1, \ldots, \gamma_h^m\}$ per ogni h.

Per ogni h, vogliamo sostituire il sistema Δ_h con un opportuno sistema disgiunto di curve Γ_h che verifichi tutte le ipotesi della Proposizione 3.1.

Ragionando come in [2, Lemma 3.3], è possibile sostituire Δ_h con un sistema disgiunto di curve $\Lambda_h = \{\gamma_h^{i_1}, \ldots, \gamma_h^{i_k}\}$ di classe C^2, con $1 \leq k \leq m$, avente le seguenti proprietà:

$$\text{(4.1)} \qquad \text{esiste } R > 0 \text{ tale che} \qquad (\Lambda_h) \subseteq B_R(0) \qquad \text{per ogni } h;$$

per ogni $M > 0$ esiste $h_M \in \mathbf{N}$ tale che

$$\text{(4.2)} \qquad I(\Lambda_h, z) = I(\Delta_h, z)$$

per ogni $h \geq h_M$ e per ogni $z \in B_M(0) \setminus (\Delta_h)$.

Per semplicità di notazione, scriviamo $\Lambda_h = \{\gamma_h^1, \ldots, \gamma_h^k\}$. Abbiamo sostituito la successione $\{\Delta_h\}_h$ con una successione $\{\Lambda_h\}_h$ i cui elementi hanno tracce uniformemente limitate rispetto a h, cioè verificanti l'ipotesi (i) della Proposizione 3.1. Dobbiamo adesso fare una ulteriore sostituzione affinchè l'ipotesi (ii) della Proposizione 3.1 sia verificata.

Consideriamo la successione $\{\gamma_h^1\}_h$. Se $\lim_{h\to+\infty} l(\gamma_h^1) = 0$, sostituiamo Λ_h con il sistema $\Lambda_h^1 = \{\gamma_h^2, \ldots, \gamma_h^k\}$. Osserviamo che la (4.1) garantisce che $(\gamma_h^1) \subseteq \overline{B_R(0)}$ per ogni h, e dunque, passando a una sottosuccessione $\{\gamma_h^1\}_h$, esistono $r_1 > 0$ e $z^1 \in B_R(0)$ tali che, per ogni $0 < r \leq r_1$, esiste $h_r \in \mathbf{N}$ con $(\gamma_h^1) \subseteq B_r(z^1)$ per ogni $h \geq h_r$. Quindi esiste $r_1 > 0$ tale che, per ogni $0 < r \leq r_1$, esistono $h_r \in \mathbf{N}$ e un punto z_h^1 con

$$\text{(4.3)} \qquad z_h^1 \in B_r(z^1) \cap (\Lambda_h), \qquad (\gamma_h^1) \subseteq B_{2r}(z_h^1) \qquad \text{per ogni } h \geq h_r.$$

Se ne deduce che, per ogni $0 < r \leq r_1$, esiste $h_r \in \mathbf{N}$ tale che $I(\gamma_h^1, z) = 0$ per ogni $h \geq h_r$ e ogni $z \in \mathbf{R}^2 \setminus B_{2r}(z_h^1)$.

Se $\{l(\gamma_h^1)\}_h$ non tende a zero per $h \to +\infty$, esistono una sottosuccessione $\{\gamma_h^1\}_h$ e una costante $c_1 > 0$ tali che $l(\gamma_h^1) \geq c_1$ per ogni h. In questo caso definiamo $\Lambda_h^1 = \Lambda_h$. Partendo da $\{\Lambda_h^1\}_h$, ripetiamo lo stesso procedimento per $\{\gamma_h^2\}_h$, in modo da ottenere una nuova successione di sistemi di curve $\{\Lambda_h^2\}_h$. Dopo k passi, il procedimento termina con una successione di sistemi di curve $\{\Lambda_h^k\}_h$, che denoteremo con $\{\Gamma_h\}_h$.

Per costruzione, per ogni h, Γ_h è un sistema disgiunto di curve di classe C^2, con $\Gamma_h = \{\gamma_h^{i_1}, \ldots, \gamma_h^{i_n}\}$, $1 \leq n \leq k$. Supponiamo che siano state fatte in totale $l = k - n$ eliminazioni per passare dal sistema Λ_h al sistema Γ_h, e siano $r_1, \ldots, r_l$ i corrispondenti numeri (risp. $z_h^1, \ldots, z_h^l$ siano i corrispondenti punti) dati dalla (4.3). Allora, per ogni $0 < r \leq \min_{j=1,\ldots,l} r_j$, esiste $h_r \in \mathbf{N}$ tale che

$$\text{(4.4)} \qquad I(\Gamma_h, z) = I(\Lambda_h, z)$$

per ogni $h \geq h_r$ e ogni $z \in \left(\mathbf{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{l} B_{2r}(z_h^j)\right) \setminus (\Lambda_h)$. Sia $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Lambda_h)$; poichè $z_h^1, \ldots, z_h^l \in (\Lambda_h)$ e $\mathbf{R}^2 \setminus (\Lambda_h)$ è aperto, esistono $0 < r \leq \min_{j=1,\ldots,l} r_j$ e $h_r \in \mathbf{N}$ tali che $z \in \mathbf{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{l} B_{2r}(z_h^j)$ per ogni $h \geq h_r$. Dato che dalle (4.1) e (4.2) segue $I(\Lambda_h, w) \in \{0,1\}$ per ogni $w \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Lambda_h)$, si ottiene dalla (4.4) che $I(\Gamma_h, z) \in \{0,1\}$. Si conclude che $I(\Gamma_h, z) \in \{0,1\}$ per ogni $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Lambda_h)$. Lo stesso risultato si ottiene se $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Gamma_h)$, scegliendo $z_h^j \neq z$ per ogni j. Inoltre, per costruzione,

$$(4.5) \qquad (\Gamma_h) \subseteq B_R(0) \qquad \text{per ogni } h,$$

e $\{\Gamma_h\}_h$ verifica la condizione (ii) della Proposizione 3.1. Usando la (4.2), si ha che, per ogni $M > 0$ e ogni $0 < r \leq \min_{j=1,\ldots,l} r_j$, esiste $h_{r,M} \in \mathbf{N}$ tale che

$$(4.6) \qquad I(\Gamma_h, z) = I(\Delta_h, z)$$

per ogni $h \geq h_{r,M}$ e ogni $z \in \left(B_M(0) \setminus \bigcup_{j=1}^{l} B_{2r}(z_h^j)\right) \setminus (\Delta_h)$. Definiamo $A_h = \{z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Gamma_h) : I(\Gamma_h, z) = 1\}$. Essendo Γ_h un sistema disgiunto di curve di classe C^2, A_h è un aperto limitato e $\partial A_h = (\Gamma_h)$. Usando la Proposizione 3.1, esiste una sottosuccessione $\{\Gamma_h\}_h$ debolmente convergente a un sistema limite di curve Γ di classe $\mathcal{B}$. Dalla (4.5) abbiamo che $(\Gamma) \subseteq \overline{B_R(0)}$. Si può dimostrare che ogni punto di $\mathbf{R}^2$ fuori dalla traccia di un sistema limite di curve di classe $\mathcal{B}$ ha indice zero oppure uno. Dunque $I(\Gamma, z) \in \{0,1\}$ per ogni $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Gamma)$. Sia A_Γ l'aperto definito in (i). È chiaro che $A_\Gamma \subseteq B_R(0)$. Poichè $\chi_{A_h}(z) = I(\Gamma_h, z)$ per ogni $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Gamma_h)$, e $\chi_{A_\Gamma}(z) = I(\Gamma, z)$ per ogni $z \in \mathbf{R}^2 \setminus (\Gamma)$, per le proprietà di continuità dell'indice e per il teorema della convergenza dominata, si ha che $A_h \to A_\Gamma$ in $L^1(\mathbf{R}^2)$ per $h \to +\infty$.

Proviamo che $\mathcal{L}^2(E \triangle A_\Gamma) = 0$. Dalle (4.5) e (4.6), per ogni $M \geq R$ e ogni $0 < r \leq \min_{j=1,\ldots,l} r_j$, abbiamo che $A_h \setminus \bigcup_{j=1}^{l} B_{2r}(z_h^j) = \left(E_h \cap B_M(0)\right) \setminus \bigcup_{j=1}^{l} B_{2r}(z_h^j)$ per h sufficientemente grande. Passando al limite per $r \to 0$, si ottiene che $\mathcal{L}^2\left((E \cap B_M(0)) \triangle A_\Gamma\right) = 0$. Essendo M arbitrario, si ottiene che $\mathcal{L}^2(E \triangle A_\Gamma) = 0$.

Le altre asserzioni del Lemma si dimostrano come in [2, Lemma 3.3]. □

Usando il Lemma 4.1, si può dimostrare (si veda [2]) il seguente risultato di parziale regolarità sugli insiemi aventi rilassato finito:

TEOREMA 4.1. *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^2$ un insieme misurabile tale che $\overline{\mathcal{F}_\phi}(E, \mathbf{R}^2) < +\infty$. Allora E^* è limitato, aperto, $\mathcal{L}^2(E \triangle E^*) = 0$, $\mathcal{H}^1(\partial E^*) < +\infty$, ed esiste un sistema limite di curve Γ di classe $\mathcal{B}$ tale che*

$$(4.7) \qquad (\Gamma) \supseteq \partial E^* \ \text{ e } \ E^* = \mathrm{int}(A_\Gamma \cup (\Gamma)).$$

Inoltre, $\overline{\mathcal{F}_\phi}(E, \mathbf{R}^2) \geq \inf\{\mathcal{F}_\phi(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{A}(E)\}$, dove $\mathcal{A}(E)$ è la collezione di tutti i sistemi limite di curve Γ di classe $\mathcal{B}$ che verificano la (4.7).

In [2] è stato mostrato che esistono insiemi molto irregolari ed aventi rilassato $\overline{\mathcal{F}}_{|\cdot|^p}$ finito (si veda la Figura 4.1), e che, se E ha bordo regolare tranne che in un numero finito

n di punti di cuspide, allora $\overline{\mathcal{F}_{|\cdot|^p}}(E, \mathbf{R}^2) < +\infty$ se e solo se n è pari (si confronti anche la Figura 1.1). Naturalmente, per le ϕ del tipo (1.2), questi risultati continuano a valere per $\overline{\mathcal{F}_\phi}$. Dall'esempio di Figura 1.3, si capisce poi che anche insiemi con un numero dispari di cuspidi (e con un numero finito di angoli) hanno rilassato $\overline{\mathcal{F}_\phi}$ finito.

Un problema interessante è quello di cercare condizioni necessarie e sufficienti da imporre su un insieme $E \in \mathcal{M}$ in modo da avere $\overline{\mathcal{F}_\phi}(E, \mathbf{R}^2) < +\infty$, e trovare qualche insieme modello per il quale si possa esplicitamente calcolare il funzionale rilassato $\overline{\mathcal{F}_\phi}$.

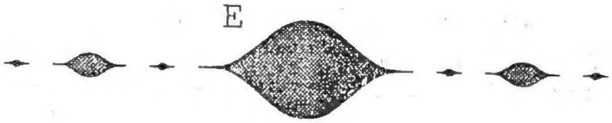

Fig. 4.1: Un insieme E, costruito su un insieme di tipo Cantor, la cui frontiera presenta molti punti irregolari. Si può dimostrare che $\overline{\mathcal{F}_{|\cdot|^p}}(E, \mathbf{R}^2) < +\infty$. Lo stesso risultato vale per $\overline{\mathcal{F}_\phi}$, con una ϕ del tipo (1.2).

Bibliografia

[1] L. AMBROSIO, *A compactness theorem for a special class of functions of bounded variation*, Boll. Un. Mat. It., 3-b (1989), pp. 857–881.

[2] G. BELLETTINI, G. DAL MASO, AND M. PAOLINI, *Semicontinuity and relaxation properties of a curvature depending functional in 2D*, Preprint SISSA March 1992 (submitted to Annali Sc. Norm. Sup. Pisa).

[3] G. BUTTAZZO, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variation*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.

[4] A.P. CALDERON AND A. ZYGMUND, *On the differentiability of functions which are of bounded variation in Tonelli's sense*, Re. Union Mat. Argentina, 20 (1960), pp. 101–121.

[5] E. DE GIORGI, *Some remarks on Γ-convergence and least squares method*, in Composite media and homogeneization theory, G. Dal Maso, G.F. Dell'Antonio editors (Trieste, 1990), Birkhäuser, Boston, pp. 135–142.

[6] E. DE GIORGI, *Introduzione ai problemi di discontinuità libera*, in Symmetry in Nature, a volume in honour of Luigi A. Radicati di Brozolo, Tomo I, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1989, pp. 265–285.

[7] M.P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[8] J.P. DUGGAN, *$W^{2,p}$ regularity for varifolds with mean curvature*, Comm. Partial Differential Equations, 11 (1986), pp. 903–026.

[9] J.P. DUGGAN, *Regularity theorems for varifolds with mean curvature*, Indiana Univ. Math. J., 35 (1986), pp. 117–144.

[10] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[11] E. GIUSTI, *Minimal Surface and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, Boston, 1984.

[12] C. GOFFMAN AND J. SERRIN, *Sublinear functions of measures and variational integrals*, Duke Math. J., 31 (1964), pp. 159–178.

[13] S.I. HUDJAEV AND A.I. VOL'PERT, *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*, Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1985.

[14] J.E. HUTCHINSON, *Second fundamental form for varifolds and the existence of surfaces minimizing curvature*, Indiana Univ. Math. J., 35 1 (1986), pp. 45–71.

[15] M. NITZBERG AND D. MUMFORD, *The 2.1-D sketch*, International Conference on Computer Vision, Computer Society Press, IEEE.

[16] L. SIMON, *Lectures on geometric measure theory*, Proceedings of the Centre of Mathematical Analysis, Canberra, 3, 1984.

[17] A.I. Vol'pert, *The space BV and quasilinear equations*, Math. USSR Sbornik, 2 (1967), pp. 225–267.

[18] W.P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.